MIHAI MICULIȚA

Probleme alese de matematică pentru pregătirea Olimpiadei Naționale 2002-2014

clasa a VIII-a

Biblioteca Olimpiadelor de Matematică

35

Editura GIL

Cuprins

1. Enunţuri - clasa a VIII-a

1.1 Enunţuri 2002

1. Să se arate că numerele $5^{5^{2000}}+1$ şi $5^{5^{2002}}+26$ sunt prime între ele.

Daniel Streţcu, Turnu Severin

2. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se arate că oricare ar fi $c \in [a, b]$ există $t \in [0, 1]$ astfel încât $c = ta + (1-t)b$;

b) Dacă $c, d \in (a, b)$ şi $c + d = a + b$ atunci $ab < cd$.

Dan Marinescu şi *Viorel Cornea*, Hunedoara

3. Se dă $a \in \mathbb{R}$. Calculaţi în funcţie de a numerele reale x, y, z ştiind că îndeplinesc condiţiile:

$$x + y + z = 3a - 1, \quad xy + xz + yz + x + y = 3a^2.$$

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

4. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 = x > 0$. Să se arate că $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \leqslant x\sqrt{x}$.

Marcel Chiriţă, Bucureşti

5. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ şi $abc = 1$, atunci are loc inegalitatea

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leqslant \left(\frac{a+b+c}{2}\right)^6.$$

Valer Pop, Şanţ, Bistriţa Năsăud

6. Demonstraţi că dacă $a, b, c \in (1, \infty)$ astfel încât $abc = 2\sqrt{2}$, atunci avem:

$$(a+1)(b+1)(c+1) > 8(a-1)(b-1)(c-1).$$

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

7. Pentru orice număr natural n notăm cu $p(n)$ cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu n.

1) Determinaţi numerele naturale a pentru care $p\left(\frac{a+1}{2}\right) = \frac{a+2}{3}$.

2) Arătaţi că nu există numere naturale b care să verifice egalitatea:

$$p(b^2) + p(b^2+1) + p(b^2+2) + \ldots + p((b+1)^2) = 2002.$$

***

8. Se dă un poligon convex cu n laturi şi fie $a \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi poligonul ştiind că numărul diagonalelor sale este egal cu raportul dintre n şi a.

Valer Pop, Şanţ, Bistriţa Năsăud

9. Se consideră un paralelipiped dreptunghic cu diagonala egală cu 1 şi M un punct arbitrar interior paralelipipedului. Se notează cu $S(M)$ suma pătratelor distanţelor de la M la cele opt vârfuri ale sale. Să se afle cea mai mică şi cea mai mare valoare a sumei $S(M)$.

Valentin Matrosenco, Bucureşti

10. Pe planul triunghiului ABC în punctele A şi B se ridică de o parte şi de alta a lui perpendicularele AD şi BE, astfel ca $m(\widehat{DCE}) = 90°$. Demonstraţi că:

$$Aria(ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 \cdot BC^2 - AD^2 \cdot BE^2}.$$

Gheorghe Molea, Curtea de Argeş

11. În tetraedrul $ABCD$ punctele E şi F sunt mijloacele medianelor AM şi AN ale triunghiurilor ABC respectiv ACD. Dacă $CE \cap AB = \{P\}$, $CF \cap AD = \{Q\}$, $DF \cap AC = \{R\}$, demonstraţi că:

a) $9Aria(PQR) = Aria(BCD)$;

b) $12(PQ + EF + MN) = 13BD$.

Virginia şi *Vasile Tică*, Câmpulung

12. Fie m, n numere naturale. Să se arate că există numerele naturale a şi b astfel încât:

$$(m^4 - m^2 + 1)(n^4 - n^2 + 1) = a^2 + b^2.$$

Bogdan Enescu, Buzău

1.2 Enunţuri 2003

13. Demonstraţi inegalitatea $\dfrac{(a+b)^3}{c} + \dfrac{(b+c)^3}{a} + \dfrac{(c+a)^3}{b} \geqslant 8(a^2+b^2+c^2)$ pentru orice $a, b, c > 0$.

Nicolae Papacu, Slobozia

14. Să se arate că numărul $1^7 + 2^7 + 3^7 + \ldots + 1000^7$ este divizibil prin 500500.

Simona Stoicoiu şi *Costin Zălog*, Tg. Jiu

15. Dacă p este un număr prim fixat, să se rezolve ecuaţia $p\{x\} = x + [x]$.

Daniel Cojocaru, Slatina

16. a) Să se demonstreze că pentru numere strict pozitive a, b, c avem

$$3\sum a^{2003} \geqslant abc\Big(\sum a^{1000}\Big)^2.$$

b) Determinaţi cel mai mic număr nenul k astfel ca pentru orice numere strict pozitive a, b, c să avem

$$k\sum a^{2003} \geqslant abc\Big(\sum a^{125}\Big)^{16}.$$

Doina şi Aurelian Ionescu, Topliţa

17. Pe planul rombului $(ABCD)$ se ridică, de aceeaşi parte, perpendicularele AA' şi CC' astfel încât $AA' = CC' \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}AB$. Arătaţi că dacă măsura unghiului format de planele $(A'BD)$ şi $(C'BD)$ este egală cu măsura unghiului format de planele $(A'BC')$ şi $(A'DC')$, atunci $ABCD$ este pătrat.

Marius Ghergu, Slatina

18. În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(a, b)$ şi $B(c, d)$ unde $a \neq b \neq c \neq d \neq a$. Care este condiţia necesară şi suficientă ca

$$\min_{M\in Oy}(MA + MB) = \min_{N\in Ox}(NA + NB)?$$

Cecilia Deaconu, Piteşti

19. În triunghiul ABC se consideră punctele $M \in (AC), D \in BM\backslash(BM)$ astfel încât $BM = 2MD$ şi $CD \parallel AB$. Punctul N este mijlocul lui (AB) şi $6MN = AB$. În exteriorul planului ABC se consideră punctul V cu proprietatea $VA = VB = VE$, unde $\{E\} = AD \cap BC$. Dacă distanţele de la V la AD respectiv BC sunt egale, demonstraţi că:

a) $VE \perp AB$;

b) $\sigma(\triangle VND)^2 + \sigma(\triangle VNC)^2 + \sigma(\triangle CDN)^2 = \sigma(\triangle VCD)^2$.

Nicolae Vizuroiu, Piteşti

1.3 Enunţuri 2004

20. Fie X o mulţime cu $n \geqslant 2$ elemente. Câte perechi (A, B) cu $A \subset B \subset X$ se pot forma?

Valentin Vornicu

21. Vârfurile unui cub se colorează în roşu, galben sau albastru. Putem proceda în aşa fel încât fiecare mulţime formată din patru vârfuri coplanare să conţină toate cele trei culori?

Gabriel Popa

22. Un cub de latură 3 se împarte în 27 de cubuleţe congruente eliminându-se un astfel de cubuleţ care nu este colţ al cubului mare.

Se poate umple exact corpul obţinut astfel cu paralelipipede dreptunghice $2 \times 1 \times 1$?

23. Se consideră $n, p \in \mathbb{N}^*$ şi $f(n,p) = \left[\frac{n^2}{p}\right]$.

a) Să se arate că $f(n,3) + f(n+1,3) + f(n+2,3)$ este pătrat perfect pentru oricare n număr natural nenul.

b) Să se arate că pentru oricare n număr natural nenul numărul $f(n) = f(n,2) + f(n+1,2)$ nu este pătrat perfect.

c) Să se arate că dacă $f(n) = f(n,p) + f(n+1,p) + f(n+2,p)$ este pătrat perfect pentru oricare n număr natural nenul, atunci $p = 3$.

Marius Burtea

24. Se ştie că numerele reale pozitive a, b, c au proprietatea că $a + b + c = abc + 2$. Demonstraţi că $\max\{a, b, c\} \geqslant 1$.

Valentin Vornicu

25. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pentru care

$$f(2x - 5) \leqslant 2x - 3 \leqslant f(2x) - 5,$$

pentru orice x real.

Liliana Antonescu

26. Să se determine numerele naturale n care au în $\mathbb{Z}$ cel puţin n divizori distincţi.

Romanţa şi Ioan Ghiţă

27. În tetraedrul $ABCD$ punctele E, M, N sunt mijloacele segmentelor $[CD]$, $[AE]$ respectiv $[BM]$. Dacă $AC \cap DM = \{F\}$, $EN \cap AB = \{P\}$, $AN \cap BE = \{Q\}$ şi $CQ \cap BD = \{L\}$, demonstraţi că P, L, E, F sunt coplanare.

Virginia şi Vasile Tică

28. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu $AC \cap BD = \{O_1\}$, $A'C \cap C'O_1 = \{O_2\}$ şi O_3 este centrul cercului înscris în $\triangle ACC'$. Ştiind că $AB = 4$ şi $AA' = 3\sqrt{2}$, aflaţi măsura unghiului format de planele $(O_1B'B)$ şi (O_2O_3B').

Marius Nicoară

29. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată şi fie O centrul bazei. Considerăm punctele $P \in (VC)$, $M \in (AB)$ şi $N \in (VM)$ astfel încât $OP \perp VC$, iar M şi N sunt mijloacele segmentelor (AB) respectiv (VM), iar $R \in NO$ astfel încât $MR \perp NO$. Pe paralela prin V la AB se ia un punct U astfel încât $2UV = AB$ şi U se află în semispaţiul determinat de planul (VMO) şi punctul B. Demonstraţi că dreptele DP, AR, UC sunt concurente pe sfera de centru O şi rază AO.

Claudiu-Ştefan Popa

30. Fie $ABCD$ un tetraedru, şi fie G_a, G_b, G_c G_d centrele de greutate ale feţelor BCD, CDA, DAB şi respectiv ABC.

a) Să se arate că dreptele AG_a, BG_b, CG_c, DG_d sunt concurente într-un punct G.

b) Dacă M este un punct interior tetraedrului $ABCD$ şi M_a, M_b, M_c, M_d sunt intersecţiile dreptelor AM, BM, CM, DM cu feţele opuse vârfurilor A, B, C, D respectiv, atunci $\dfrac{AM}{MM_a} = \dfrac{BM}{MM_b} = \dfrac{CM}{MM_c} = \dfrac{DM}{MM_d}$ dacă şi numai dacă $G \equiv M$.

Valentin Vornicu

31. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$. În punctele M, N, P, Q, mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA, se ridică perpendiculare pe planul (ABC). Pe aceste perpendiculare, de aceeaşi parte a planului (ABC) se iau punctele M_1, N_1, P_1, Q_1 astfel ca $MM_1 = \frac{1}{2}AB$, $NN_1 = \frac{1}{2}BC$, $PP_1 = \frac{1}{2}CD$ şi $QQ_1 = \frac{1}{2}DA$. Să se arate că dacă punctele M_1, N_1, P_1, Q_1 sunt coplanare, atunci patrulaterul $M_1N_1P_1Q_1$ este inscriptibil.

Constantin Apostol

32. Să se arate că într-un tetraedru echifacial, centrul sferei înscrise în tetraedru coincide cu centrul de greutate al tetraedrului.

Valentin Vornicu

1.4 Enunţuri 2005

33. Fie triunghiul ABC echilateral. Pe perpendicularele în A şi C de aceeaşi parte a planului ABC luăm respectiv punctele M şi N astfel încât $AM = AB = a$ şi $MN = BN$. Să se determine:

(a) distanţa de la punctul A la planul MNB;

(b) sinusul unghiului dintre MN şi BC.

Gianina Busuioc, Niculai Solomon

34. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de muchie a. Ştiind că O şi M sunt proiecţiile lui D pe (ABC), respectiv pe BC, iar N este simetricul lui M faţă de CO, aflaţi:

(a) cosinusul unghiului dintre DM şi AB;

(b) tangenta unghiului dintre planele (DMN) şi (ABC);

(c) distanţa de la C la planul (DMN).

Ion Trandafir

35. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca

$$f(2x-1) - 5 \leqslant 4x - 8 \leqslant 2f(x+2) - 14 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinaţi valoarea minimă a expresiei $(f(x-1))^2 + (f(3+x))^2 + 16x$; arătaţi că $(f(2005))^2 + 4f(1005) - 17$ este pătrat perfect.

Gianina Busuioc, Niculai Solomon

36. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, punctele M, N, P sunt situate respectiv pe muchiile AA', $C'D'$ şi CC'. Fie S punctul în care dreapta CD' intersectează planul (MNP).

Arătaţi că dacă D' este mijlocul segmentului $[CS]$, atunci unghiul pe care îl face planul (MNP) cu planul (BCC') este mai mare decât unghiul dintre (MNP) şi (ABC).

Dorina Zaharia

37. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped cu baza $ABCD$ romb, în care $AB = AA' = 10$ cm, $AC = 16$ cm şi fie O intersecţia diagonalelor AC şi BD. Se ştie că $A'O \perp (ABCD)$. Să se afle:

(a) distanţa de la punctul D la planul (ABB');

(b) tangenta unghiului diedru determinat de planele (ABC) şi (ABB');

(c) distanţa dintre dreptele AC şi BC'.

Mariana Coadă

38. Fie $a, b, c \in (0, 1]$ şi $x, y, z \geqslant 1$ astfel încât

$$\sqrt{x-a^2}+\sqrt{y-b^2}+\sqrt{z-c^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right).$$

(a) Demonstraţi că $x + y + z \leqslant 6$.

(b) În ce caz avem egalitate la punctul **(a)**?

Cecilia Diaconescu

39. Să se arate că pentru fiecare număr natural $n \geqslant 2$ ecuaţia

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{y}$$

are o infinitate de soluţii $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ în mulţimea numerelor naturale.

Traian Tămâian

40. Pe muchiile AB, BC, CD, DA ale unui tetraedru regulat $ABCD$ se iau punctele M, N, P, respectiv Q astfel încât $AM = BN = CP = DQ$. Fie O mijlocul segmentului $[NQ]$. Să se arate că $(MOP) \perp NQ$.

Emilia Lungu

41. În prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ oarecare, punctul M este mijlocul muchiei $A'B'$. Fie $P \in (MC)$. Arătaţi că dacă $A'P \cap B'C = \{D\}$ şi $B'P \cap A'C = \{E\}$, atunci dreptele AE, BD şi CC' sunt concurente.

Virginia şi Vasile Tică

42. Pe muchia AD a piramidei $ABCD$ se ia un punct oarecare M. Fie $MN \| AC$, $N \in DC$ şi $NP \| BC$, $P \in DB$, iar X, Y, respectiv Z mijloacele segmentelor $[AN]$, $[CP]$, respectiv $[BM]$.

(a) Demonstraţi că planele (MNP), (XYZ) şi (ABC) sunt paralele şi echidistante.

(b) Determinaţi raportul $\dfrac{MD}{MA}$ pentru ca în ipoteza că ABC este triunghi echilateral, măsura unghiului dintre dreptele BC şi XY să fie de $45°$.

Petre Simion

43. Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 2005\}$. Se consideră funcţiile $f, g : A \to \mathbb{N}$ date de

$$\begin{aligned} f(x) &= \text{cel mai mic număr de forma } 2^k \text{ cel puţin egal cu } x, \\ g(x) &= \text{cel mai mare număr de forma } 2^k \text{ cel mult egal cu } x. \end{aligned}$$

(a) Determinaţi cardinalul mulţimii $\{x \in A \mid f(x) = g(x)\}$.

(b) Demonstraţi că

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + ... + \frac{1}{f(2005)} \in (6,25; 6,5).$$

Petre Simion

44. Se consideră un tetraedru $OABC$ în care $OA \perp OB \perp OC \perp OA$. Arătaţi că:

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} \geqslant \sqrt{2}\left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}\right).$$

Cezar Lupu

45. Arătaţi că există un număr a natural nenul, par, astfel încât pentru o infinitate de numere întregi pare b, expresia $a + b + ab$ să fie pătrat perfect.

Gheorghe Gherasim

46. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu latura de lungime 3 cm se consideră mijloacele A'', B'', C'', D'' ale segmentelor $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, respectiv $[DD']$. Să se calculeze volumul poliedrului convex determinat de vârfurile A, A'', B', B'', C, C'', D', D''. Câte feţe are acest poliedru?

A. M. Ionescu

47. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. Să se determine funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care

$$f\left(x - \frac{b}{a}\right) + 2x \leqslant \frac{a}{b}x^2 + \frac{2b}{a} \leqslant f\left(x + \frac{b}{a}\right) - 2x,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Dorin Mărghidanu